Description de la structure de certaines superalgèbres de Lie quadratiques via la notion de la T^*-extension

Ignacio BAJO, Saïd BENAYADI et Martin BORDEMANN

I.B.: Universidad de Vigo, Depart. Matemática Aplicada,
E.T.S.I Telecomunicación, 36280 Vigo, Espagne.
E-mail: ibajo@dma.uvigo.es

S.B.: Université de Metz, Département de Mathématiques,
CNRS, UPRES-A-7035, Ile du Saulcy, F-57045 Metz cedex 1, France.
E-mail: benayadi@poncelet.sciences.univ-metz.fr

M.B.: Fakultät für Physik, Universität Freiburg,
Hermann-Herder-Str.3, D-79104 Freiburg i. Br., Allemagne.
E-mail: Martin.Bordemann@physik.uni-freiburg.de

Résumé. Dans cette note, nous introduisons la notion de T^*-extension $T^*\mathfrak{g}$ d'une superalgèbre de Lie $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire une extension de $\mathfrak{g}$ par son espace dual $\mathfrak{g}^*$. L'accouplement naturel induit sur cette extension une forme bilinéaire, paire, supersymétrique, non dégénérée et invariante ($B([X,Y],Z) = B(X,[Y,Z])$ pour tous $X, Y, Z \in T^*\mathfrak{g}$), c'est-à-dire la structure d'une superalgèbre de Lie quadratique (ou orthogonale). Ces extensions de $\mathfrak{g}$ se classifient à l'aide de son troisième groupe de cohomologie scalaire paire. En outre, nous montrons que toutes les superalgèbres de Lie quadratiques $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{a}_{\bar{1}}$ de dimension finie qui sont soit nilpotentes, soit résolubles telles que $[\mathfrak{a}_{\bar{1}}, \mathfrak{a}_{\bar{1}}] \subset [\mathfrak{a}_{\bar{0}}, \mathfrak{a}_{\bar{0}}]$ s'obtiennent à l'aide d'une T^*-extension dans le cas d'un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

Description of the structure of quadratic Lie superalgebras via the notion of T^*-extension

Abstract. In this note we introduce the notion of T^*-extension $T^*\mathfrak{g}$ of a Lie superalgebra $\mathfrak{g}$, i.e. an extension of $\mathfrak{g}$ by its dual space $\mathfrak{g}^*$. The natural pairing induces on $T^*\mathfrak{g}$ an even supersymmetric nondegenerate bilinear form B which is invariant ($B([X,Y],Z) = B(X,[Y,Z])$ for all $X, Y, Z \in T^*\mathfrak{g}$), i.e. the structure of a quadratic (or metrised or orthogonal) Lie superalgebra. These extensions can be classified by the third even scalar cohomology group of $\mathfrak{g}$. Moreover, we show that all finite-dimensional quadratic Lie superalgebras $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{a}_{\bar{1}}$ which are either nilpotent, or solvable and such that $[\mathfrak{a}_{\bar{1}}, \mathfrak{a}_{\bar{1}}] \subset [\mathfrak{a}_{\bar{0}}, \mathfrak{a}_{\bar{0}}]$ can be constructed by means of a T^*-extension in the case of an algebraically closed field of characteristic zero.

Abridged English Version.

All the Lie superalgebras in this note will be finite-dimensional over an algebraically field $\mathbb{K}$ of characteristic zero. For the terminology used here we refer the reader to [4] and [6].

For a given Lie superalgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ a bilinear form B on $\mathfrak{g}$ is called an invariant scalar product if and only if B is even, supersymmetric, nondegenerate, and invariant, the latter meaning that $B([X,Y],Z) = B(X,[Y,Z])$ for all $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. The pair $(\mathfrak{g}, B)$ is called a quadratic (or metrised or orthogonal) Lie superalgebra in case B is an invariant scalar product on $\mathfrak{g}$. $\varphi : (\mathfrak{g}, B) \to (\mathfrak{g}', B')$ is called an isometry of the quadratic Lie superalgebras $(\mathfrak{g}, B)$ and $(\mathfrak{g}', B')$ if and only if φ is an isomorphism of the Lie superalgebras $\mathfrak{g}$ and $\mathfrak{g}'$ and $B'(\varphi X, \varphi Y) = B(X,Y)$ for all $X, Y \in \mathfrak{g}$.

In [1] Benamor and Benayadi have transferred the notion of double extension introduced for quadratic Lie algebras by Medina and Revoy [5] to certain classes of Lie superalgebras (those where the centre has nontrivial intersection with the even part) which allows an inductive construction of those quadratic

Lie superalgebras. The aim of this note is to transfer the notion of T^*-extension formulated in [3] for quadratic Lie algebras to the case of a quadratic Lie superalgebra.

Let $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ be a Lie superalgebra, $[\ ,\ ]_{\mathfrak{g}}$ its bracket, $\mathfrak{g}^*$ its dual space, and π its coadjoint representation. Let ω be an even 2-cocycle of $\mathfrak{g}$ with values in $\mathfrak{g}^*$.

Proposition I.1./I.2. With the above notation define the following structures on the vector space $\mathcal{A} := \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$: Let $X + F$ (resp. $Y + H$) be a homogeneous element of $\mathcal{A}$ of degree x (resp. y) in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, and

$$\begin{aligned} [X+F, Y+H] \quad &:= \quad [X,Y]_{\mathfrak{g}} + \omega(X,Y) + \pi(X)(H) - (-1)^{xy}\pi(Y)(F), \\ B(X+F, Y+H) \quad &:= \quad F(Y) \ + \ (-1)^{xy}\ H(X). \end{aligned}$$

Then $(\mathcal{A}, B)$ is a quadratic Lie superalgebra if and only if ω is supercyclic, i.e.

$$\omega(X,Y)(Z) = \ (-1)^{x(y+z)}\ \omega(Y,Z)(X), \ \ \forall\ (X,Y,Z) \in \mathfrak{g}_x \times \mathfrak{g}_y \times \mathfrak{g}_z.$$

We shall speak of the quadratic Lie superalgebra $(\mathcal{A}, B)$ constructed out of $\mathfrak{g}$ and the supercyclic 2-cocycle ω as a T^*-extension of $\mathfrak{g}$ and shall denote $\mathcal{A}$ by the symbol $T^*_\omega\mathfrak{g}$ or $T^*\mathfrak{g}$.

Theorem I.2. Let $\mathfrak{g}$ a Lie superalgebra and ω be a supercyclic 2-cocycle of $\mathfrak{g}$ with values in the dual space $\mathfrak{g}^*$.

Then $\hat{\omega} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ defined by $\hat{\omega}(X,Y,Z) := \omega(X,Y)(Z)$ for all $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ is an even 3-cocycle of $\mathfrak{g}$ with values in the trivial $\mathfrak{g}$-module $\mathbb{K}$, and each even scalar 3-cocycle of $\mathfrak{g}$ is given by some $\hat{\omega}$. Moreover two T^*-extensions $T^*_{\omega_1}\mathfrak{g}$ and $T^*_{\omega_2}\mathfrak{g}$ are isometric if the corresponding even scalar 3-cocycles $\hat{\omega}_1$ and $\hat{\omega}_2$ are cohomologous.

The main result of this note is the following:

Theorem II.1. Let $(\mathfrak{g}, B)$ be a quadratic Lie superalgebra which is either nilpotent, or solvable and such that $[\mathfrak{g}_{\bar{1}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}] \subset [\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{0}}]$.

Then $\mathfrak{g}$ contains a graded totally isotropic ideal $\mathfrak{I}$ (i.e. $B(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}) = \{0\}$) whose dimension is equal to the integer part of one half of the dimension of $\mathfrak{g}$.

In case the dimension of $\mathfrak{g}$ is even then $\mathfrak{g}$ is isometric to the T^*-extension of the quotient Lie superalgebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{I}$.

In case the dimension of $\mathfrak{g}$ is odd then $\mathfrak{g}$ is isometric to a graded ideal of codimension 1 of the T^*-extension of the quotient Lie superalgebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{I}$ restricted to which the invariant scalar product is nondegenerate.

Remarks: 1. The proof of this Theorem relies on the Theorems of Engel and Lie where the latter is known to no longer hold in the original form for all solvable Lie superalgebras but only for the class mentioned above.

2. There is an example of a nilpotent quadratic Lie superalgebra whose centre is entirely contained in its odd part; it is a T^*-extension, but does not fall under the class treated by [1].

Introduction

Les superalgèbres de Lie envisagées dans cette note sont de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ commutatif algébriquement clos de caractéristique zéro.

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ une superalgèbre de Lie, une forme bilinéaire B sur $\mathfrak{g}$ est dite invariante si: $B([X,Y],Z) = B(X,[Y,Z])$ pour tous X, Y, Z éléments de $\mathfrak{g}$, si en plus B est supersymétrique (c'est-à-dire $B(X,Y) = (-1)^{xy}B(Y,X)\ \forall\ (X,Y) \in \mathfrak{g}_x \times \mathfrak{g}_y$), paire (c'est-à-dire $B(\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}) = \{0\}$) et non dégénérée, B est alors dite un produit scalaire invariant sur $\mathfrak{g}$. Une superalgèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite quadratique si elle est munie d'un produit scalaire invariant. Un idéal gradué $\mathfrak{I}$ d'une superalgèbre de Lie quadratique $(\mathfrak{g}, B)$ est dit non dégénéré (resp. dégénéré) si la restriction de B à $\mathfrak{I} \times \mathfrak{I}$ est non dégénérée (resp. dégénérée). Une superalgèbre de Lie quadratique $(\mathfrak{g}, B)$ est dite B-irréductible si $\mathfrak{g}$ ne contient aucun idéal gradué non dégénéré différent de $\{0\}$ et de $\mathfrak{g}$. Deux superalgèbres de Lie quadratiques $(\mathfrak{g}, B)$ et $(\mathfrak{g}', B')$ sont isométriques s'il existe φ un isomorphisme de superalgèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}'$ tel que $B'(\varphi(X), \varphi(Y)) = B(X,Y), \ \ \forall\ (X,Y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$.

Dans [1], il est montré que toute superalgèbre de Lie quadratique $(\mathfrak{g}, B)$ B-irréductible de dimension n telle que la partie paire du centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ soit non nulle est une double extension d'une superalgèbre de Lie quadratique de dimension $n-2$ par l'algèbre de Lie de dimension 1. En utilisant ce résultat, les auteurs de [1] ont obtenu une classification inductive des superalgèbres de Lie quadratiques $(\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}, B)$ telles que $\dim \mathfrak{g}_{\bar{1}} = 2$ en montrant que de telles superalgèbres vérifient $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{g}_{\bar{0}} \neq \{0\}$. Rappelons que la notion de la double extension a été introduite dans [5] par A. Médina et Ph. Revoy pour étudier les algèbres de Lie quadratiques et a été généralisée par H.Benamor et S. Benayadi aux superalgèbres de Lie. Grâce à cette notion, une classification inductive de toutes les algèbres de Lie quadratiques est obtenue dans [5] et une classification inductive de certaines superalgèbres de Lie quadratiques est obtenue dans [1] et dans [2].

Si $(\mathfrak{g}, B)$ est une superalgèbre de Lie quadratique telle que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ et $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{g}_{\bar{0}} = \{0\}$ c'est-à-dire $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}_{\bar{1}}$, les arguments utilisés dans [1] ne marchent plus pour montrer que $\mathfrak{g}$ est une double extension. Par conséquent, il faut chercher d'autres méthodes pour décrire au moins des sous-classes de la classe $\mathcal{C}$ des superalgèbres de Lie quadratiques $(\mathfrak{g}, B)$ telles que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ et $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}_{\bar{1}}$. Dans le premier paragraphe de cette note, nous allons montrer que la classe $\mathcal{C}$ est non vide en donnant des exemples d'éléments de $\mathcal{C}$ qui sont nilpotents.

Dans cette note, nous allons généraliser la notion de la T^*-extension aux superalgèbres de Lie, cette notion a été introduite par M. Bordemann dans [3] pour étudier les algèbres non associatives munies de formes bilinéaires, symétriques, non dégénérées et associatives (ou invariantes), donc en particulier pour étudier les algèbres de Lie quadratiques. Après, nous allons utiliser cette notion pour décrire les superalgèbres de Lie quadratiques nilpotentes et les superalgèbres de Lie résolubles $(\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}, B)$ telles que $[\mathfrak{g}_{\bar{1}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}] \subset [\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{0}}]$. Rappelons que si $(\mathfrak{g}, B)$ est une superalgèbre de Lie quadratique alors le sous-espace orthogonal de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ par rapport à B est $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Par conséquent, si $(\mathfrak{g}, B)$ est une superalgèbre de Lie quadratique résoluble différente de $\{0\}$ alors $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$.

I. T^*-extensions des superalgèbres de Lie quadratiques.

Soient $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ une superalgèbre de Lie, $[\ ,\ ]_{\mathfrak{g}}$ son crochet, $\mathfrak{g}^*$ son dual et π sa représentation coadjointe. Rappelons que π est définie par: $(\pi(X)(F))(Y) = -(-1)^{xf} F([X, Y])$ où X (resp. Y) est un élément homogène de $\mathfrak{g}$ de degré x (resp. y) et F est un élément homogène de $\mathfrak{g}^*$ de degré f. Soit $\omega : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ une application bilinéaire paire, c'est-à-dire $\omega(\mathfrak{g}_x \times \mathfrak{g}_y) \subset \mathfrak{g}^*_{x+y}$ $\forall\ (x, y) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On définit sur l'espace vectoriel $\mathcal{A} := \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ l'application bilinéaire $[\ ,\ ] : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ définie par:

$$[X + F, Y + H] = [X, Y]_{\mathfrak{g}} + \omega(X, Y) + \pi(X)(H) - (-1)^{xy} \pi(Y)(F),$$

où $X + F$ (resp. $Y + H$) est un élément homogène de $\mathcal{A}$ de degré x (resp. y). Cette multiplication fait de $\mathcal{A}$ une algèbre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}-$graduée.

Proposition I.1. $(\mathcal{A}, [\ ,\ ])$ est une superalgèbre de Lie si et seulement si $\omega \in (Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*))_{\bar{0}}$, c'est-à-dire ω est paire, superantisymétrique ($\omega(X, Y) = (-1)^{xy} \omega(Y, X)$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}_x \times \mathfrak{g}_y$) et vérifie

$$\begin{aligned} \omega(X, [Y, Z]) + (-1)^{x(y+z)} \omega(Y, [Z, X]) + (-1)^{z(x+y)} \omega(Z, [X, Y]) + \pi(X)(\omega(Y, Z)) & \\ +(-1)^{x(y+z)} \pi(Y)(\omega(Z, X)) + (-1)^{z(x+y)} \pi(Z)(\omega(X, Y)) &= 0, \end{aligned}$$

pour tous $(X, Y, Z) \in \mathfrak{g}_x \times \mathfrak{g}_y \times \mathfrak{g}_z$. Sur $\mathcal{A} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$, on considère la forme bilinéaire $B : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ définie par:

$$B(X + F, Y + H) := F(Y) + (-1)^{xy} H(X), \quad \forall\ (X + F, Y + H) \in \mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_y.$$

Cette forme est supersymétrique, paire et non dégénérée.

Proposition I.2. B est invariante si et seulement si ω est supercyclique, c'est-à-dire ω vérifie

$$\omega(X, Y)(Z) = (-1)^{x(y+z)} \omega(Y, Z)(X), \quad \forall\ (X, Y, Z) \in \mathfrak{g}_x \times \mathfrak{g}_y \times \mathfrak{g}_z.$$

Définition. Soient $\mathfrak{g}$ une superalgèbre de Lie et $\omega \in (Z^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*))_{\bar{0}}$ qui est en plus supercyclique. La superalgèbre de Lie $\mathcal{A}=\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*$ munie du crochet $[\ ,\ ]$ et de la forme bilinéaire B définis ci-dessus est appelée la T^*-extension de $\mathfrak{g}$ par ω , et on la note $T^*_\omega\mathfrak{g}$ ou $(T^*_\omega\mathfrak{g},B)$ ou parfois $T^*\mathfrak{g}$.

Remarque. Si $\omega=0$, $T^*_0\mathfrak{g}$ n'est autre que la double extension de $\{0\}$ par $\mathfrak{g}$.

Lemme I.1. Soit $(\mathfrak{g},B)$ une superalgèbre de Lie quadratique de dimension paire n.
Alors, un sous-espace vectoriel $\mathfrak{I}$ totalement isotrope de $\mathfrak{g}$ de dimension $\frac{n}{2}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ si et seulement si $\mathfrak{I}$ est abélien, c'est-à-dire $[\mathfrak{I},\mathfrak{I}]=\{0\}$.

Le théorème suivant est le premier résultat principal de cette note.

Théorème I.1. Soit $(\mathcal{A},T)$ une superalgèbre de Lie quadratique de dimension n.
Alors, $(\mathcal{A},T)$ est isomorphe à une T^*-extension $(T^*_\omega\mathfrak{g},B)$ si et seulement si n est pair et $\mathcal{A}$ contient un idéal gradué $\mathfrak{I}$ totalement isotrope de dimension $\frac{n}{2}$. Dans ce cas $\mathfrak{g}$ et $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$ sont isomorphes en tant que superalgèbres de Lie.

Nous avons la déscription cohomologique suivante des T^*-extensions:

Théorème I.2. Soit $\mathfrak{g}$ une superalgèbre de Lie sur un corps $\mathbb{K}$.
i) Pour tout $\omega \in (Z^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*))_{\bar{0}}$, l'application canonique $\omega \mapsto \hat{\omega}:\ ((X,Y,Z) \mapsto \omega(X,Y)(Z))$, où $(X,Y,Z)\in\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$, définit un isomorphisme linéaire entre le sous-espace de tous les éléments supercycliques de $(Z^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*))_{\bar{0}}$ et l'espace $(Z^3(\mathfrak{g},\mathbb{K}))_{\bar{0}}$ de tous les $3-$cocycles scalaires paires de $\mathfrak{g}$. Rappelons que $(Z^3(\mathfrak{g},\mathbb{K}))_{\bar{0}}$ est l'espace vectoriel des formes trilinéaires $f:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{K}$ qui sont paires ($f(\mathfrak{g}_x,\mathfrak{g}_y,\mathfrak{g}_z)=\{0\}$ si $x+y+z=0$), superantisymétriques ($f(X,Y,Z)=-(-1)^{xy}f(Y,X,Z)=-(-1)^{yz}f(X,Z,Y)$ pour tous $(X,Y,Z)\in\mathfrak{g}_x\times\mathfrak{g}_y\times\mathfrak{g}_z$) et fermées:

$$\begin{aligned}0 \;=\;& f([X,Y],Z,V)-(-1)^{yz}f([X,Z],Y,V)+(-1)^{x(y+z)}f([Y,Z],X,V)\\&+(-1)^{(y+z)v}f([X,V],Y,Z)-(-1)^{x(y+v)+vz}f([Y,V],X,Z)\\&+(-1)^{(x+y)(z+v)}f([Z,V],X,Y),\end{aligned}$$

pour tous $(X,Y,Z,V)\in\mathfrak{g}_x\times\mathfrak{g}_y\times\mathfrak{g}_z\times\mathfrak{g}_v$.
ii) Soit $\phi:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{K}$ une application bilinéaire paire ($\phi(\mathfrak{g}_x,\mathfrak{g}_y)=\{0\}$ si $x+y\neq 0$) et superantisymétrique, et soient ω_1 et ω_2 deux éléments supercycliques de $(Z^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*))_{\bar{0}}$. Alors l'application

$$S_\phi : T^*_{\omega_1}\mathfrak{g}\to T^*_{\omega_2}\mathfrak{g} : (X+F)\mapsto X+\phi(X,.)+F$$

définit une isométrie de superalgèbres de Lie quadratiques si et seulement si $\omega_2=\omega_1-\delta\phi$ où $(\delta\phi)(X,Y,Z):=-\phi([X,Y],Z)+(-1)^{yz}\phi([X,Z],Y)-(-1)^{x(y+z)}\phi([Y,Z],X)$ pour tous $(X,Y,Z)\in\mathfrak{g}_x\times\mathfrak{g}_y\times\mathfrak{g}_z$.
Ainsi on obtient une application naturelle $[\hat{\omega}]\mapsto[T^*_\omega\mathfrak{g}]$ du troisième groupe de cohomologie scalaire paire de $\mathfrak{g}$ dans l'ensemble des classes d'isométries des structures de superalgèbres de Lie quadratiques de dimension $2\dim\mathfrak{g}$.

Exemple I.1. Maintenant nous allons construire des superalgèbres de Lie quadratiques $(\mathfrak{g},B)$ qui sont nilpotentes et qui vérifient $\mathfrak{g}_{\bar{0}}\neq\{0\}$ et $\mathfrak{g}\in\mathcal{C}$. Avant de construire ces éléments de $\mathcal{C}$, remarquons que $\mathcal{C}$ contient toutes les superalgèbres de Lie $\mathfrak{g}$ telles que $\mathfrak{g}_{\bar{0}}=\{0\}$.
Soit $\mathcal{T}(n)$ (resp. $\mathcal{N}(n)$) le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $n\in\mathbb{N}$, formé des matrices carrées d'ordre n qui sont triangulaires supérieures (resp. triangulaires supérieures strictes). Il est facile de vérifier que le $\mathbb{K}-$espace vectoriel

$$\mathfrak{g}(n):=\{\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix} \ :\ (A,C,D)\in\mathcal{N}(n)^3, B\in\mathcal{T}(n)\}$$

est une sous-superalgèbre de Lie nilpotente de $\mathfrak{gl}(n,n)$ telle que $\dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}(n))=1$, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}(n))\subset(\mathfrak{g}(n))_{\bar{1}}$, et $[(\mathfrak{g}(n))_{\bar{1}},(\mathfrak{g}(n))_{\bar{1}}]=(\mathfrak{g}(n))_{\bar{0}}$. Rappelons que le crochet de $\mathfrak{gl}(n,n)$ est défini par $[M,N]=MN-(-1)^{\alpha\beta}NM$, pour tout $(M,N)\in\mathfrak{gl}(n,n)_\alpha\times\mathfrak{gl}(n,n)_\beta$. Considérons maintenant $\mathcal{E}=T^*_0(\mathfrak{g}(n))$ la T^*-extension de $\mathfrak{g}(n)$ par $\omega=0$. Le centre $\mathfrak{z}(\mathcal{E})$ de cette T^*-extension est égale la somme de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}(n))$

et $\{f \in (\mathfrak{g}(n))^* : \ f([\mathfrak{g}(n), \mathfrak{g}(n)]) = \{0\}\}$. Comme $[(\mathfrak{g}(n))_{\bar{1}}, (\mathfrak{g}(n))_{\bar{1}}] = (\mathfrak{g}(n))_{\bar{0}}$, alors $\mathfrak{z}(\mathcal{E}) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g}(n)) \oplus ((\mathfrak{g}(n)^*)_{\bar{1}} = \{f \in (\mathfrak{g}(n))^* : \ f((\mathfrak{g}(n))_{\bar{0}}) = \{0\}\})$, par conséquent $\mathfrak{z}(\mathcal{E}) \subset (\mathfrak{g}(n))_{\bar{1}} \oplus (\mathfrak{g}(n)^*)_{\bar{1}} = \mathcal{E}_{\bar{1}}$, en plus $\mathfrak{z}(\mathcal{E}) \neq \{0\}$ car $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}(n)) \neq \{0\}$. En utilisant la définition du crochet de $\mathcal{E}$, un calcul simple montre que la nilpotence de $\mathfrak{g}(n)$ entraîne la nilpotence de $\mathcal{E}$. On conclut que $\mathcal{E}$ est une superalgèbre de Lie quadratique telle que $\mathfrak{z}(\mathcal{E}) \neq \{0\}$ et $\mathcal{E} \in \mathcal{C}$.

II. Structure de certaines superalgèbres de Lie quadratiques résolubles.

Lemme II.1. Soient V un espace vectoriel $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}-$gradué muni d'une forme bilinéaire B supersymétrique paire non dégénérée et $\mathcal{L}$ une sous-superalgèbre de Lie de $\mathfrak{osp}(V, B)$. Si $\mathcal{L}$ est constituée d'endomorphismes nilpotents de V ou si $\mathcal{L}$ est résoluble telle que $[\mathcal{L}_{\bar{1}}, \mathcal{L}_{\bar{1}}] \subset [\mathcal{L}_{\bar{0}}, \mathcal{L}_{\bar{0}}]$, alors tout sous-espace vectoriel gradué W de V totalement isotrope et stable par $\mathcal{L}$ est contenu dans un sous-espace vectoriel gradué W_{max} de V totalement isotrope maximal parmi les sous-espaces vectoriels totalement isotropes de V qui sont stables par $\mathcal{L}$ et dim $W_{max} = E(\frac{n}{2})$ où $E(\frac{n}{2})$ est la partie entière de $\frac{n}{2}$. Si n est pair, $W_{max} = (W_{max})^{\perp}$. Si n est impair, $W_{max} \subset (W_{max})^{\perp}$ et dim $(W_{max})^{\perp}$ $-$ dim $W_{max} =$ 1. On a aussi $\varphi((W_{max})^{\perp})$ est contenu dans W_{max}, pour tout φ élément de $\mathcal{L}$.

Enonçons maintenant le deuxième résultat principal de cette note.

Théorème II.1. Soit $(\mathfrak{g}, B)$ une superalgèbre de Lie quadratique qui est nilpotente ou résoluble telle que $[\mathfrak{g}_{\bar{1}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}] \subset [\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{0}}]$. Alors, $\mathfrak{g}$ contient un idéal gradué totalement isotrope de dimension $E(\frac{dim \mathfrak{g}}{2})$ qui est maximal parmi les sous-espaces vectoriels totalement isotropes de $\mathfrak{g}$. En plus, si la dimension de $\mathfrak{g}$ est paire alors $\mathfrak{g}$ est isométrique à une T^*-extension de la superalgèbre de Lie quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{I}$. Si la dimension de $\mathfrak{g}$ est impaire, alors $\mathfrak{g}$ est isométrique à un idéal gradué non dégénéré de codimension 1 d'une T^*-extension de la superalgèbre de Lie quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{I}$.

Remarque. Dans les démonstrations du lemme II.1 et du théorème II.1, nous utilisons le théorème d'Engel dans le cas des superalgèbres de Lie nilpotentes (où il suffit de supposer que la caractéristique soit $\neq 2$) et le théorème de Lie dans le cas des superalgèbres de Lie résolubles ([4], [6]). Rappelons le théorème de Lie dans le cas des superalgèbres de Lie résolubles: Toutes les représentations irréductibles d'une superalgèbre de Lie résoluble $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ sur un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique zéro sont de dimension 1 si et seulement si $[\mathfrak{g}_{\bar{1}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}] \subset [\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{0}}]$ ([4], Prop. 5.2.4., p.82). Ceci explique notre choix de la classe des superalgèbres de Lie résolubles considérée dans le lemme II.1 et dans le théorème II.1.

On termine cette note par les deux questions ouvertes suivantes:

1) Peut-on généraliser les résultats du théorème II.1 à toutes les superalgèbres de Lie résolubles $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ sur un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique zéro?

2) Dans [5], il est montré que toute algèbre de Lie quadratique est une double extension. Par conséquence, toute T^*-extension d'une algèbre de Lie est une double extension. Avec la généralisation de la notion de la double extension ([1]) et la généralisation de la T^*- extension (dans cette note) aux superalgèbres de Lie, nous nous posons la question naturelle suivante: Si $T^*_\omega\mathfrak{g}$ est une T^*-extension d'une superalgèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $T^*_\omega\mathfrak{g}$ est-elle une double extension?

Les démonstrations des résultats annoncés paraîtront dans un article ultérieur.

Remerciements: I.B., S.B. et M.B. remercient les Départements de Mathématiques de l'Université de Vigo et de Metz et le Graduiertenkolleg 'Partielle Differentialgleichungen' de l'Université de Freiburg pour des séjours de recherche pendant lesquels ce travail a été conçu.

Références

[1] H. Benamor et S. Benayadi, Double extension of quadratic Lie superalgebras, *Communications in Algebra*, 27 (1), 1999, p. 67-88.

[2] S. Benayadi, Quadratic Lie superalgebras with the completely reducible action of even part on the odd part, *Journal of Algebra.*, 223, 2000, p.344-366.

[3] M. Bordemann, Nondegenerate invariant bilinear forms on nonassociative algebras, *Acta Math. Univ. Comenianae,* Vol. LXVI(1), 1997, p. 151-201.

[4] V. Kac, Lie superalgebras, *Adv. Math*, 26, 1977, p. 8-96.

[5] A. Médina et Ph. Revoy, Algèbres de Lie et produit scalaire invariant, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.* 4ème série, t.18, 1985, p. 553 - 561.

[6] M. Scheunert, *Theory of Lie superalgebras. An introduction,* Lecture Notes in Math. 716, 1979.